CINEMATIQUE DU POINT

MRU - MRUA

*La résolution des exercices se fera de façon **rigoureuse**, **méthodique** et **précise** : pas de produit en croix, pas de « petits calculs intuitifs ». De la méthode, de la méthode, de la méthode…*

Exercice 1

Une voiture se déplace en ligne droite sur l'horizontale repérée par l'axe $\vec{x}$ à vitesse constante $v = 90\ km \cdot h^{-1}$.
On donne $x(0) = 0$.

a) Type de mouvement : ☑ MRU ☐ MRUA car : **la voiture se déplace à vitesse constante**

b) Donner les équations générales du mouvement.

Les équations générales du MRU sont : (elles sont fournies par le cours)

$$\text{MRU} \begin{cases} a(t) = 0 \\ v(t) = v_0 \\ x(t) = v_0 \cdot t + x_0 \end{cases}$$

c) Que signifie l'expression « $x(0) = 0$ » ?

$$x(0) = 0$$

Valeur de la position x (en m)

Valeur de la date t (en s) pour laquelle la position est x (en m)

Cette expression mathématique indique une valeur de position (x = 0 ici) à une date donnée (t = 0 ici).

Il ne faut pas confondre $x(0)$ et x_0 ; ce n'est pas la même chose…

d) Déterminer les **équations spécifiques** du mouvement (rechercher la(les) constante(s) d'intégration).

Il s'agit de partir des équations générales et de déterminer v_0 et x_0 à l'aide des conditions particulières données par l'énoncé.
Comme il y a deux choses à trouver, il faut deux conditions particulières…
L'énoncé donne :
explicitement la condition particulière $x(0) = 0$ [C1].

la vitesse qui est tout le temps la même puisque constante : $v(t) = 90\ km \cdot h^{-1}$ => [C2] => $v_0 = \dfrac{90}{3{,}6} = 25\ m \cdot s^{-1}$

Recherche de x_0 :

On prend l'équation en position et la condition en position :

$x(t) = v_0 \cdot t + x_0$

$0 = 25 \times 0 + x_0$

$\Rightarrow x_0 = 0$

Les équations spécifiques du mouvement de la voiture sont donc :

$$a(t) = 0$$
$$v(t) = 25$$
$$x(t) = 25 \cdot t$$

e) Calculer en $h : min : s$ la durée $T_{(200)}$ pour parcourir la distance $d = 200\ km$.

$x(t) = 25 \cdot t \quad \Leftrightarrow \quad t = \dfrac{x(t)}{25}$

Pour $x(T_{200}) = d = 200000\ m$ **, on a** $T_{200} = \dfrac{200000}{25} = 8000\ s = 133{,}3\ min = 2{,}22\ h$

$T_{200} = 2h : 13 min : 33s$

f) Calculer en s la durée T_{12} comprise entre les instants $t_1 = 30\ min$ et $t_2 = 35\ min$.

$T_{12} = T_2 - T_1 = 35 - 30 = 5\ min \equiv 60 \times 5 = 300\ s$

g) Calculer en km la distance d_{12} parcourue sur la durée T_{12}.

Il faut prendre l'équation de position :

$x(300) = 25 \times 300 = 7500\ m \equiv 7{,}5\ km$

h) Calculer en s la durée T_{34} comprise entre les instants $t_3 = 55\ min$ et $t_4 = 60\ min$.

$T_{34} = T_4 - T_3 = 60 - 55 = 5\ min \equiv 60 \times 5 = 300\ s$

i) Calculer en km la distance d_{34} parcourue sur la durée T_{34}.

Il faut à nouveau prendre l'équation de position ou sinon, plus directement :

$T_{34} = T_{12} \quad \Rightarrow \quad d_{34} = d_{12} = 7{,}5\ km$

On a donc parcouru des distances égales en des temps égaux (typique du MRU).

Exercice 2

Un ascenseur se déplace à vitesse constante $v = 1{,}5\ m \cdot s^{-1}$ sur la verticale repérée par l'axe $\vec{z}$ positif ascendant. La distance entre deux étages est $h = 3\ m$. On donne $z(0) = 12\ m$.

a) Type de mouvement : ☑ MRU ☐ MRUA car : **l'ascenseur se déplace à vitesse constante**

b) Donner les équations générales du mouvement.

Les équations générales du MRU sont : (elles sont fournies par le cours)

$$\text{MRU} \begin{cases} a(t) = 0 \\ v(t) = v_0 \\ z(t) = v_0 \cdot t + z_0 \end{cases}$$

c) Que signifie l'expression « $z(0) = 12\ m$ » ?

Cette expression mathématique indique une valeur de position (z = 12 m) à une date donnée (t = 0).

d) Déterminer les **équations spécifiques** du mouvement (rechercher la(les) constante(s) d'intégration).

Il s'agit de partir des équations générales et de déterminer v_0 et x_0 à l'aide des conditions particulières données par l'énoncé.

Comme il y a deux choses à trouver, il faut deux conditions particulières…

L'énoncé donne :

explicitement la condition particulière $z(0) = 12\ m$ [C1].

la vitesse qui est tout le temps la même puisque constante : $v = 1{,}5\ m \cdot s^{-1}$ [C2] => $v_0 = 1{,}5\ m \cdot s^{-1}$

Recherche de z_0 :

On prend l'équation en position et la condition en position :

$$z(t) = v_0 \cdot t + z_0$$
$$12 = 1{,}5 \times 0 + z_0$$
$$\Rightarrow z_0 = 12\ m$$

Les équations spécifiques du mouvement de la voiture sont donc :

$$a(t) = 0$$
$$v(t) = 1{,}5$$
$$z(t) = 1{,}5 \cdot t + 12$$

e) Calculer en s la durée $T_{étage}$ pour passer d'un étage à l'autre.

L'énoncé précise que la hauteur entre deux étages est $h = 3\ m$; il s'agit donc de rechercher le temps nécessaire pour parcourir cette distance.

Attention donc, il faut trouver une durée et pas une date => on travaille avec les Δ…

$$\Delta z = 1{,}5 \cdot \Delta t \quad \Leftrightarrow \quad \Delta t = \frac{\Delta z}{1{,}5} = \frac{h}{1{,}5} = \frac{3}{1{,}5} = 2\ s$$

f) Où se trouve l'ascenseur à la date $t = 10\ s$?

Tout bête, on prend l'équation de position :

$$z(10) = 1{,}5 \times 10 + 12 = 27\ m$$

Exercice 3

Une voiture en mouvement rectiligne sur l'axe $\vec{x}$ passe de 0 à $100\ km \cdot h^{-1}$ en une durée $T_{0-100} = 5\ s$. On suppose l'accélération constante. On donne $x(0) = 0$.

a) Type de mouvement : ☐ MRU ☑ MRUA car : **la voiture accélère.**

b) Donner les équations générales du mouvement.

Le cours donne :

MRUV
$$\begin{cases} a(t) = a_0 \\ v(t) = a_0 \cdot t + v_0 \\ x(t) = \dfrac{1}{2} a_0 \cdot t^2 + v_0 \cdot t + x_0 \end{cases}$$

c) Que signifie l'expression « $x(0)=0$ » ?

A la date t = 0, la voiture est à l'abscisse x = 0.

d) Etablir les deux conditions particulières de l'énoncé portant sur les vitesses.

A t = 0, la vitesse est nulle, v = 0 => $v(0)=0$

A t = 5 s, la vitesse est de 100 km.h^{-1}, v = 0 => $v(5)=\frac{100}{3{,}6}=27{,}78\ m\cdot s^{-1}$

e) Déterminer les **équations spécifiques** du mouvement.

Il y a trois constantes à déterminer : x_0**,** v_0 **et** a_0**. Il faut donc trois conditions particulières et on les a :**

$$x(0)=0$$
$$v(0)=0$$
$$v(5)=27{,}78\ m\cdot s^{-1}$$

On peut trouver aisément l'accélération a_0 **car on connaît la variation de vitesse dans un temps donné ; on utilise ici la formule « toute faite » suivante :**

$a_0=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{27{,}78-0}{5-0}=+5{,}57\ m\cdot s^{-2}$ **; l'accélération est positive, la vitesse augmente (comme prévu).**

On a donc : $a(t)=5{,}57$

On prend maintenant l'équation en vitesse (plus simple que l'équation en position qui contient les deux inconnues x_0**,** v_0**) et une condition en vitesse :**

Equation : $v(t)=a_0\cdot t+v_0$ **avec** $a_0=5{,}57\ m\cdot s^{-2}$ **=>** $v(t)=5{,}57\cdot t+v_0$

Condition : $v(0)=0$

=> $0=5{,}57\times 0+v_0 \quad\Rightarrow\quad v_0=0$

Ca marche aussi si on prend l'autre condition en vitesse :

Condition : $v(5)=27{,}78\ m\cdot s^{-1}$

=> $27{,}78=5{,}57\times 5+v_0 \quad\Rightarrow\quad v_0=27{,}78-5{,}57\times 5=0$

On prend maintenant l'équation en position (plus simple que l'équation en position qui contient les deux inconnues x_0**,** v_0**) et une condition en position:**

Equation : $x(t)=\frac{1}{2}\cdot a_0\cdot t^2+v_0\cdot t+x_0$ **avec** $a_0=5{,}57\ m\cdot s^{-2}$ **et** $v_0=0$ **=>** $x(t)=2{,}78\cdot t^2+x_0$

Condition : $x(0)=0$

=> $0=2{,}78\times 0^2+x_0 \quad\Rightarrow\quad x_0=0$

Les trois constantes x_0**,** v_0 **et** a_0 **sont maintenant trouvées, on peut écrire les équations spécifiques :**

$$a(t)=5{,}57$$
$$v(t)=5{,}57\cdot t$$
$$x(t)=2{,}78\cdot t^2$$

Les questions qui suivent consistent globalement à exploiter les équations spécifiques qui viennent d'être établies…

f) Calculer en m la position $x(5)$.

$$x(5) = 2{,}78 \times 5^2 = 69{,}6\ m$$

g) Calculer en s la durée T_{12} comprise entre les instants $t_1 = 0\ s$ et $t_2 = 1\ s$.

$$T_{12} = t_2 - t_1 = 1 - 0 = 1\ s$$

h) Calculer en km la distance d_{12} parcourue sur la durée T_{12}.

Attention donc, il faut trouver une durée et pas une date.

La clé est de comprendre et écrire que :

$$d_{12} = x(t_2) - x(t_1)$$

Avec

$$x(t_2) = x(1) = 2{,}78 \times 1^2 = 2{,}78\ m \qquad \textbf{et} \qquad x(t_1) = x(0) = 2{,}78 \times 0^2 = 0\ m$$

Soit :

$$d_{12} = x(t_2) - x(t_1) = 2{,}78 - 0 = 2{,}78\ m$$

i) Calculer en s la durée T_{23} comprise entre les instants $t_2 = 1\ s$ et $t_3 = 2\ s$.

$$T_{23} = t_3 - t_2 = 2 - 1 = 1\ s$$

j) Calculer en km la distance d_{24} parcourue sur la durée T_{23}.

$$d_{23} = x(t_3) - x(t_2)$$

Avec

$$x(t_3) = x(2) = 2{,}78 \times 2^2 = 11{,}12\ m \qquad \textbf{et} \qquad x(t_2) = 2{,}78\ m$$

Soit :

$$d_{23} = x(t_3) - x(t_2) = 11{,}12 - 2{,}78 = 8{,}34\ m$$

On remarque qu'en MRUA, sans surprise,
les distances parcourue en des temps égaux sont inégales.

Exercice 4 (long car trois phases à étudier)

Une voiture en mouvement rectiligne sur l'axe $\vec{x}$ passe de 0 à $70\ km \cdot h^{-1}$ en une durée $T_{0-70} = 10\ s$. Une fois la vitesse $v = 70\ km \cdot h^{-1}$ atteinte, elle la maintient sur une distance $d_{II} = 3\ km$ puis revient à vitesse nulle en $T_{III} = 15\ s$. On suppose que les accélérations sont constantes. On donne $x(0) = 0$.

a) Compléter le tableau synthétique dans la limite des renseignements fournis par l'énoncé.

Phase	Phase I (accélération)	Phase II (vitesse constante)	Phase III (ralentissement)
Date de début (s)	**0**	**10**	**164,3**
Date de fin (s)	**10**	**164,3**	**164,3 + 15 = 179,3**
Durée (s)	**10 – 0 = 10**	**164,3 – 10 = 154,3**	**15**
Accélération $(m \cdot s^{-2})$	**+ 1,94**	**0**	**– 1,30**
Vitesse initiale $(m \cdot s^{-1})$	**0**	**19,44**	**19,44**
Vitesse finale $(m \cdot s^{-1})$	**70 / 3,6 = 19,44**	**19,44**	**0**
Variation de vitesse $(m \cdot s^{-1})$	**19,44 – 0 = 19,44**	**0**	**0 – 19,44 = -19,44**
Position initiale (m)	**0**	**97,2**	**3097,2**
Position finale (m)	**97,2**	**3000 + 97,2 = 3097,2**	**3243,3**
Variation de position (m) *(distance parcourue)*	**97,2 – 0 = 97,2**	**3000**	**146,11**

b) Donner les équations générales du mouvement de la phase I : $a_I(t)$, $v_I(t)$ et $x_I(t)$.

$$a_I(t) = a_{I0}$$

$$v_I(t) = a_{I0} \cdot t + v_{I0}$$

$$x_I(t) = \frac{1}{2} \cdot a_{I0} \cdot t^2 + v_{I0} \cdot t + x_{I0}$$

c) Donner les équations générales du mouvement de la phase II : $a_{II}(t)$, $v_{II}(t)$ et $x_{II}(t)$.

$$a_{II}(t) = 0$$

$$v_{II}(t) = v_{II0}$$

$$x_{II}(t) = v_{II0} \cdot t + x_{II0}$$

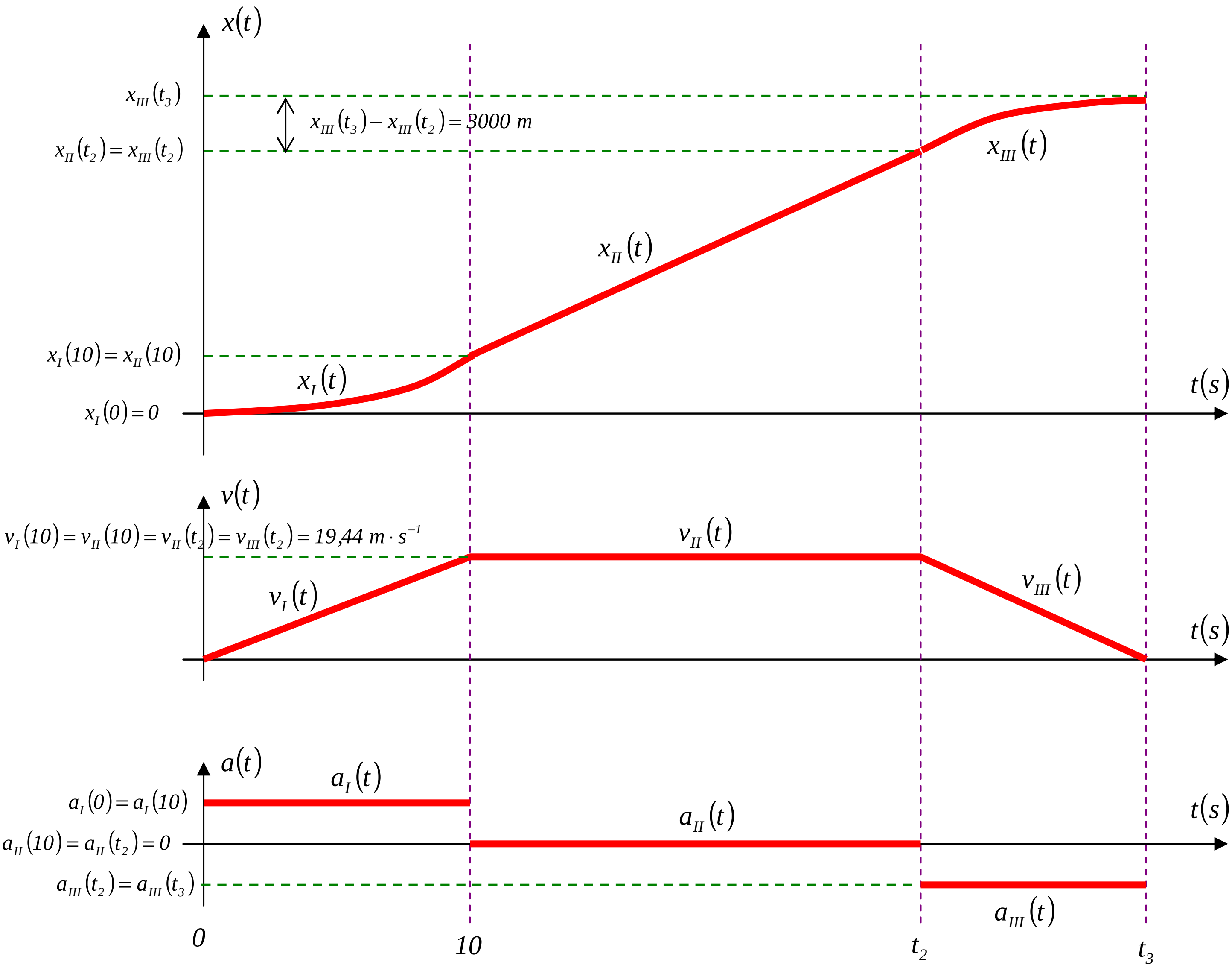
d) Donner les équations générales du mouvement de la phase III : $a_{III}(t)$, $v_{III}(t)$ et $x_{III}(t)$.

$$a_{III}(t) = a_{III0}$$

$$v_{III}(t) = a_{III0} \cdot t + v_{III0}$$

$$x_{III}(t) = \frac{1}{2} \cdot a_{III0} \cdot t^2 + v_{III0} \cdot t + x_{III0}$$

e) Réaliser les graphes des positions, vitesses et accélération en renseignant numériquement ce qui est connu et littéralement ce qui ne l'est pas.



f) Déterminer les **équations spécifiques** du mouvement des phases I, II et III.

Pour la phase I : (MRUA)

$$a_I(t) = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{19{,}44 - 0}{10 - 0} = 1{,}94\ m \cdot s^{-2}$$

$$v_I(t) = a_{I0} \cdot t + v_{I0} \textbf{ avec } v_I(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = a_{I0} \times 0 + v_{I0} \quad \Rightarrow \quad v_{I0} = 0$$

$$x_I(t) = \frac{1}{2} \cdot a_{I0} \cdot t^2 + v_{I0} \cdot t + x_{I0} \textbf{ avec } x_I(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = \frac{1}{2} \cdot a_{I0} \times 0^2 + x_{I0} \quad \Rightarrow \quad x_{I0} = 0$$

Au final, pour la phase I, on a :

$$\boxed{\begin{aligned} a_I(t) &= 1{,}94 \\ v_I(t) &= 1{,}94 \cdot t \\ x_I(t) &= 0{,}972 \cdot t^2 \end{aligned}}$$

Pour la phase II : (MRU)

$$a_{II}(t) = 0$$

$$v_{II}(t) = v_{II0} \textbf{ avec } v_{II}(10) = v_I(10) = v_{II0} = 19{,}44\ m \cdot s^{-1}$$

$$x_{II}(t) = v_{II0} \cdot t + x_{II0} = 19{,}44 \cdot t + x_{II0} \textbf{ avec}$$

$$x_{II}(10) = x_I(10) = 0{,}972 \times 10^2 = 97{,}2\ m \quad \Rightarrow \quad 97{,}2 = 19{,}44 \times 10 + x_{II0} \quad \Rightarrow \quad x_{II0} = 97{,}2 - 194{,}4 = -97{,}2\ m$$

Au final, pour la phase II, on a :

$$\boxed{\begin{aligned} a_{II}(t) &= 0 \\ v_{II}(t) &= 19{,}44 \\ x_{II}(t) &= 19{,}44 \cdot t - 97{,}2 \end{aligned}}$$

Pour la phase III : (MRUA)

Remarque : on ne connaît ni t_3 ni t_2 mais on connaît la différence $t_3 - t_2 = 15$ s.

$$a_{III}(t) = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_3) - v(t_2)}{t_3 - t_2} = \frac{0 - 19{,}44}{15} = -1{,}30\ m \cdot s^{-2}$$

Accélération négative => on perd de la vitesse (c'est cohérent)

Passons à la vitesse et à la recherche de la constante $v_{III\,0}$

$$v_{II}(t) = a_{III\,0} \cdot t + v_{III\,0}$$

L'énoncé donne la distance parcourue en phase II : $d_{II} = 3\ km$

On peut donc calculer la date à laquelle se termine la phase II qui est aussi celle à laquelle commence la phase III :

$$d_{II} = x_{II}(t_2) - x_{II}(10)$$
$$3000 = (19{,}44 \cdot t_2 - 97{,}2) - (19{,}44 \times 10 - 97{,}2)$$
$$3000 = 19{,}44 \cdot t_2 - 194{,}4$$
$$t_2 = \frac{3000 + 194{,}4}{19{,}44}$$
$$t_2 = 164{,}3\ s$$

Et comme la phase III dure $T_{III} = 15\ s$ **, on a**

$$T_{III} = t_3 - t_2 \quad \Leftrightarrow \quad t_3 = T_{III} + t_2 = 15 + 164{,}3 = 179{,}3\ s$$

On peut donc maintenant écrire :

$v_{III}(179{,}3) = 0$ **(la vitesse est nulle à la fin de la phase III)**

$$0 = -1{,}30 \times 179{,}3 + v_{III\,0} \quad \Rightarrow \quad v_{III\,0} = 233{,}1\ m \cdot s^{-1}$$

L'équation de la vitesse est donc : $v_{III}(t) = -1{,}30 \cdot t + 233{,}1$

Passons à l'équation de position pour trouver la constante $x_{III\,0}$

$$x_{III}(t) = \frac{1}{2} \cdot a_{III\,0} \cdot t^2 + v_{III\,0} \cdot t + x_{III\,0}$$
$$x_{III}(t) = -0{,}65 \cdot t^2 + 233{,}1 \cdot t + x_{III\,0}$$

Ecrivons que la position initiale en phase III est égale à la position finale en phase II :

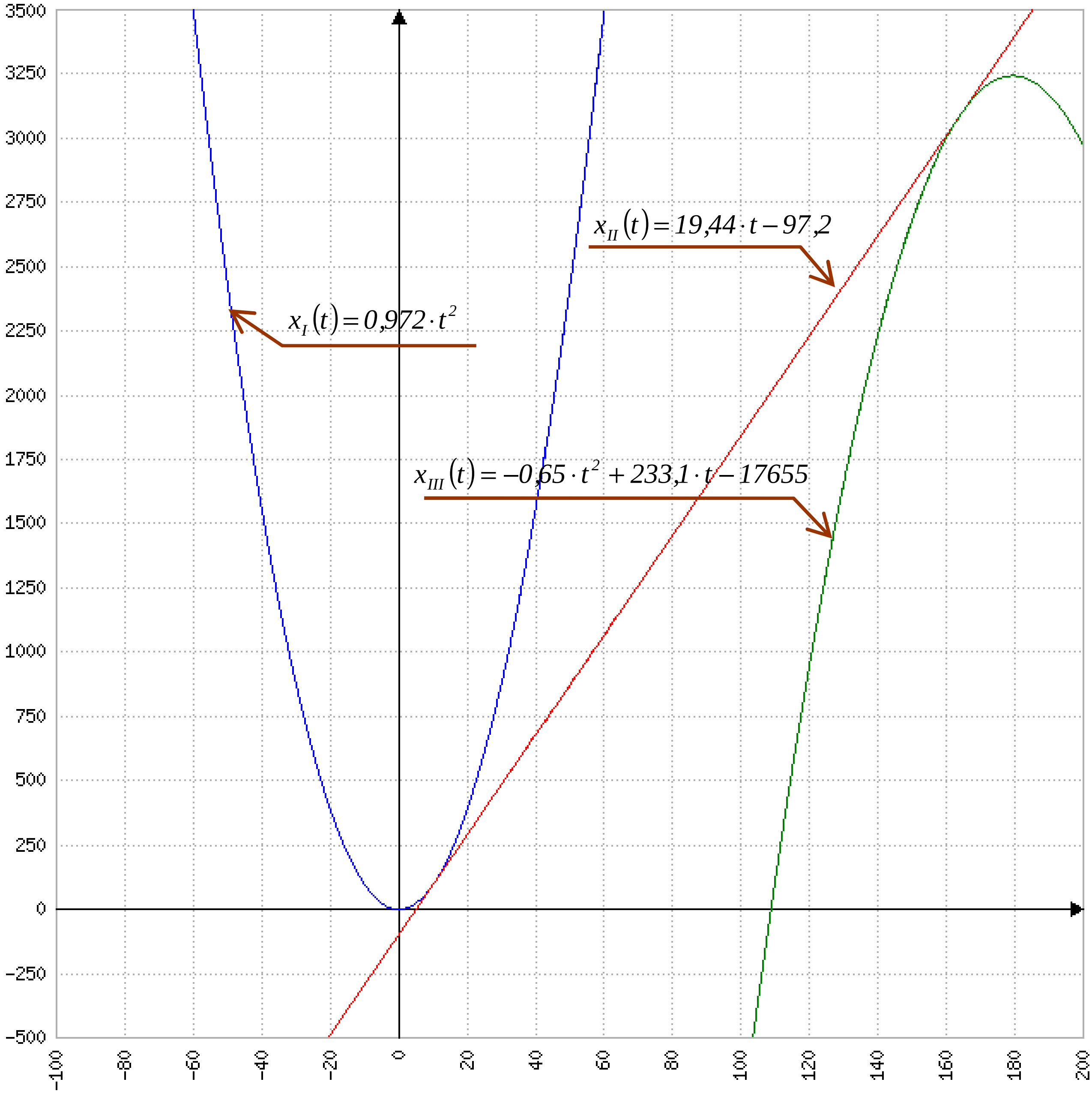
$$x_{III}(164{,}3) = 3097{,}2 \quad \Rightarrow \quad 3097{,}2 = -0{,}65 \times 164{,}3^2 + 233{,}1 \times 164{,}3 + x_{III0} \quad \Rightarrow \quad x_{III0} = -17655\ m$$

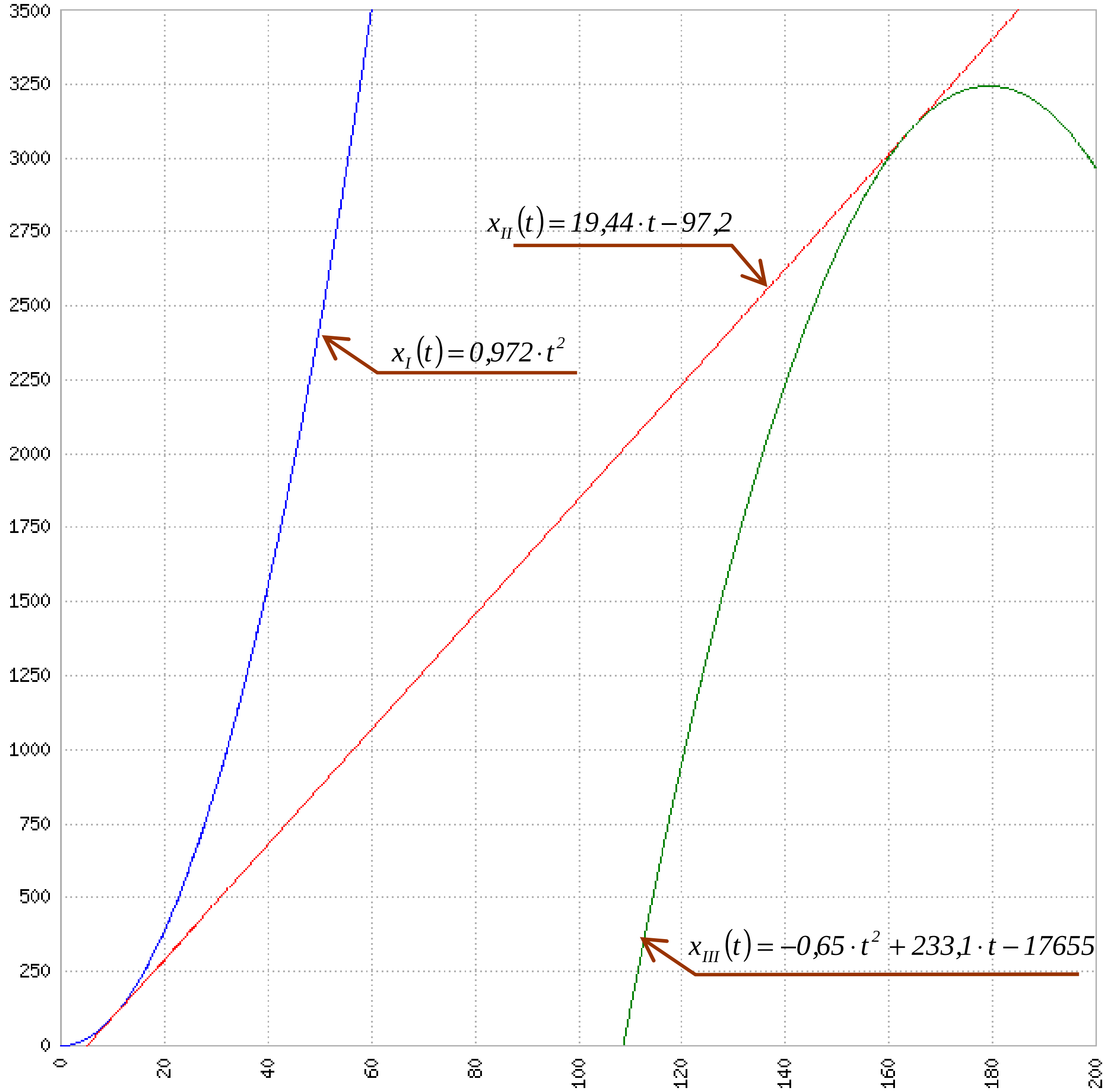
Au final, pour la phase III, on a :

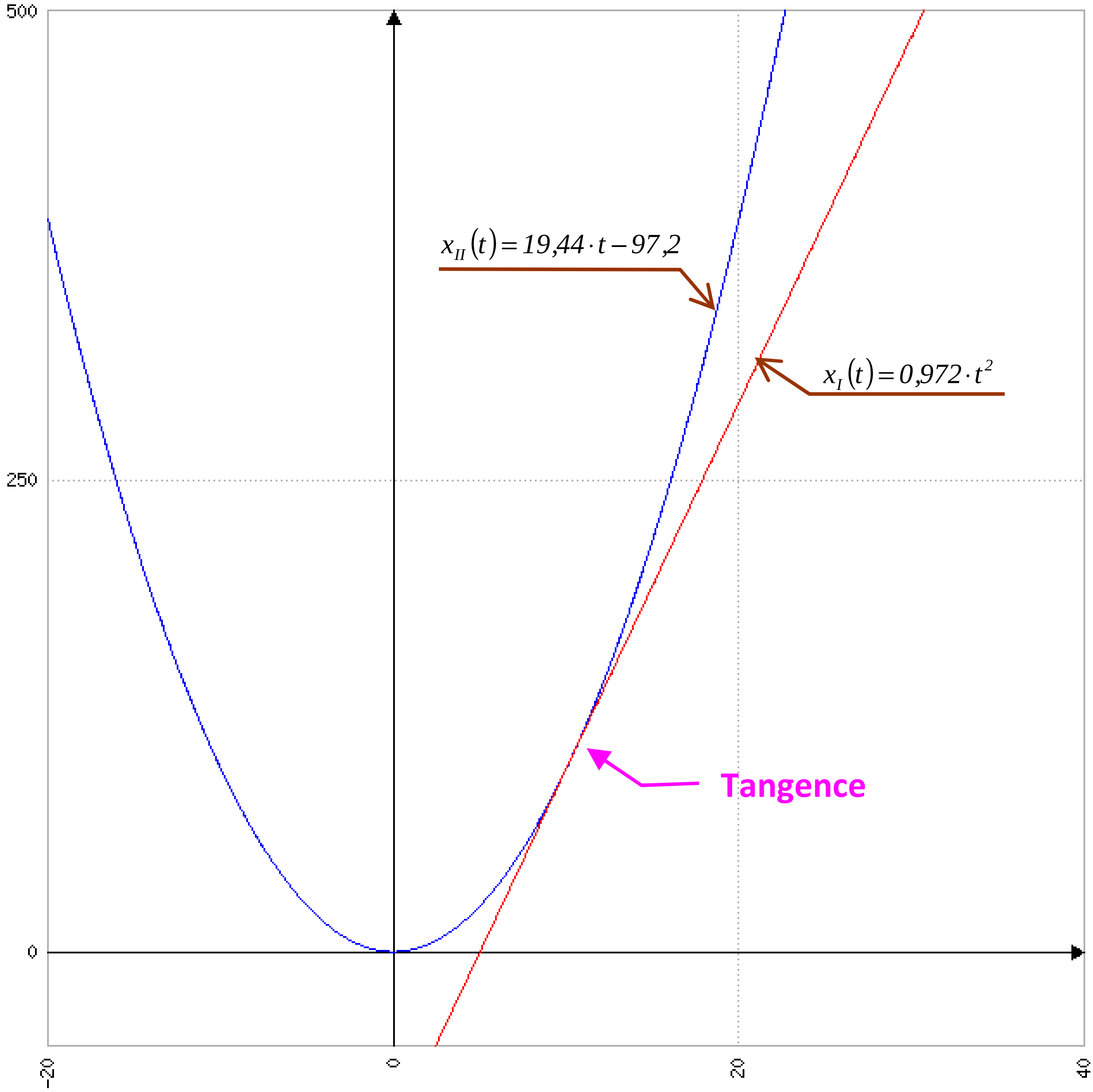
$$\boxed{\begin{array}{l} a_{III}(t) = -1{,}3 \\ v_{III}(t) = -1{,}3 \cdot t + 233{,}1 \\ x_{III}(t) = -0{,}65 \cdot t^2 + 233{,}1 \cdot t - 17655 \end{array}}$$

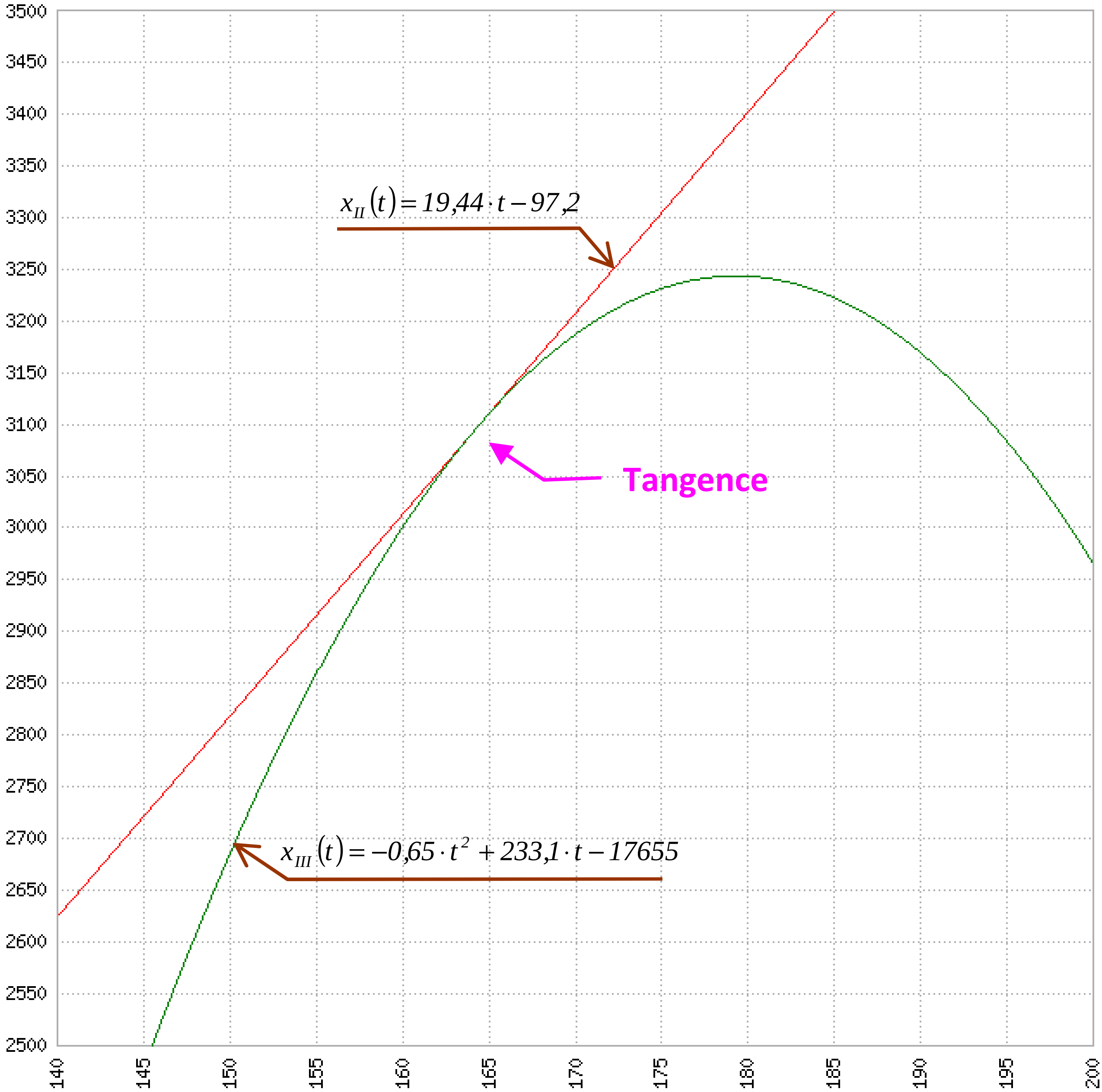
g) Poser les calculs nécessaires pour compléter le tableau de synthèse.

Position finale (phase III) : $x_I(t) = -0{,}65 \times 179{,}3^2 + 233{,}1 \times 179{,}3 - 17655 = 3243{,}3\ m$




3500
3250
3000
2750
2500
2250
2000
1750
1500
1250
1000
750
500
250
0
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
$x_{II}(t) = 19{,}44 \cdot t - 97{,}2$
$x_I(t) = 0{,}972 \cdot t^2$
$x_{III}(t) = -0{,}65 \cdot t^2 + 233{,}1 \cdot t - 17655$


500
250
0
-20
0
20
40
$x_{II}(t) = 19{,}44 \cdot t - 97{,}2$
$x_I(t) = 0{,}972 \cdot t^2$
Tangence



$x_{II}(t) = 19{,}44 \cdot t - 97{,}2$
Tangence
$x_{III}(t) = -0{,}65 \cdot t^2 + 233{,}1 \cdot t - 17655$